IFT-2002

Informatique Théorique

H14 - cours 5

Julien Marcil - julien.marcil@ift.ulaval.ca

Conventions

- Les majuscules sont des symboles non terminaux.
- Les minuscules sont des symboles terminaux.
- S est le symbole initial.

Cette convention permet de simplifier la description d'une grammaire en donnant seulement la description de R.

Notation

$$S \to ASC \qquad S \to B$$
$$B \to bB \qquad B \to \lambda$$
$$A \to a \qquad C \to c$$

Il est possible de noté les règles de réécriture plus simplement

$$S \to ASC \mid B$$
$$B \to bB \mid \lambda$$
$$A \to a$$
$$C \to c$$

Production

On nomme **production** l'application d'une régle de de réécriture à une chaîne de symboles terminaux et non terminaux.

Soit $u, v, w \in (V \cup \Sigma)^*$, et la régle de de réécriture $A \rightarrow w$.
On dit que uAv *produit* uwv, noté

$$uAv \Rightarrow uwv$$

Dérivation

On nomme **dérivation** l'application d'une ou plusieurs régles de de réécriture à une chaîne de symboles terminaux et non terminaux.

Soit $u, v \in (V \cup \Sigma)^*$ on dit u *dérive* v, noté

$$u \overset{*}{\Rightarrow} v$$

si $u = v$ ou s'il existe $u_1, u_2, \ldots, u_k$ pour $k \geq 0$ et

$$u \Rightarrow u1 \Rightarrow u2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow uk \Rightarrow v$$

Langage généré par G

Soit la gramaire $G = (V, \Sigma, S, R)$.

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \overset{*}{\Rightarrow} w\}$$

On dit que $L(G)$ est le **langage généré par G**.

Aujourd'hui

- Grammaire
  - régulière
  - hors context
- Automate à pile

Grammaire

Grammaire régulière

Définition: Soit $G = (V, \Sigma, S, R)$ une grammaire. G est **régulière** si les *règles de réécriture* respecte les restrictions suivantes:

- Les termes de gauche consistent en un seul symbole *non terminal*.
- Les termes de droit consistent en soit
  - un symbole *terminal* suivi d'un symbole *non terminal*
  - un seul symbole *terminal*
  - λ

Exemple

$$S \to bS \qquad S \to a \qquad S \to \lambda$$

Remarque

À cause de ces restrictions, une grammaire régulière permet de générer les symboles de gauche à droite.

Après k applications de règles de production qui ne sont pas des λ-règles le mot généré est de la forme

$$a_1 a_2 \dots a_k A$$

où $a_i \in \Sigma$ et $A \in V$

Théorème

Soit G une grammaire.

$$L(G) \text{ est régulier} \iff G \text{ est régulière}$$

Grammaire hors contexte

Définition: Soit $G = (V, \Sigma, S, R)$ une grammaire. G est **hors contexte** si les *règles de réécriture* respecte les restrictions suivantes:

- Les termes de gauche consistent en un seul symbole *non terminal*.

Exemple

$$S \to SS \qquad S \to aSb$$
$$S \to \lambda$$

Grammaire hors contexte

Ce type de grammaire est le plus utilisé en informatique.

Les grammaires BNF (Backus-Naur Form), utilisées pour définir la syntaxe des langages de programmation, sont des grammaires équivalentes aux grammaires non contextuelles.

grammaires BNF

```
<expr> ::= <term> "+" <expr>
         |  <term>

<term> ::= <factor> "*" <term>
         |  <factor>

<factor> ::= "(" <expr> ")"
           |  <const>

<const> ::= integer
```

Remarques

Les grammaires non contextuelles génèrent des chaînes par dérivation tout comme les grammaires régulières.

Mais dans le cas des grammaires non contextuelles, au cours du processus de dérivation, la possibilité peut s'offrir à nous de choisir parmi plusieurs non terminaux à remplacer.

Exemple

$$S \to zMNz$$
$$M \to aMa \mid z$$
$$N \to bNb \mid z$$

$$S \overset{*}{\Rightarrow} zazabzbz$$

Dérivation à gauche

Une **dérivation à gauche** s'effectue en remplaçant toujours, à chaque étape du processus de dérivation, le non terminal le plus à gauche.

Dérivation à droite

Une **dérivation à droite** s'effectue en remplaçant toujours, à chaque étape du processus de dérivation, le non terminal le plus à droite.

Arbre de dérivation

La racine de l'arbre de dérivation est l'axiome de la grammaire.

Les non terminaux forment les nœuds internes et les terminaux forment les feuilles.

Exemple

$$S \to S + S$$
$$S \to S * S$$
$$S \to (S)$$
$$S \to S - S$$
$$S \to S \,/\, S$$
$$S \to a$$

$$S \overset{*}{\Rightarrow} a + a * a$$

grammaire ambiguë

Une grammaire est dite **ambiguë** si elle permet plus d'un arbre de dérivation pour une séquence terminale donnée.

Langage hors contexte

Définition: Un langage est dit **hors contexte** (ou *non contextuelle*) s'il existe une grammaire hors contexte qui le génère.

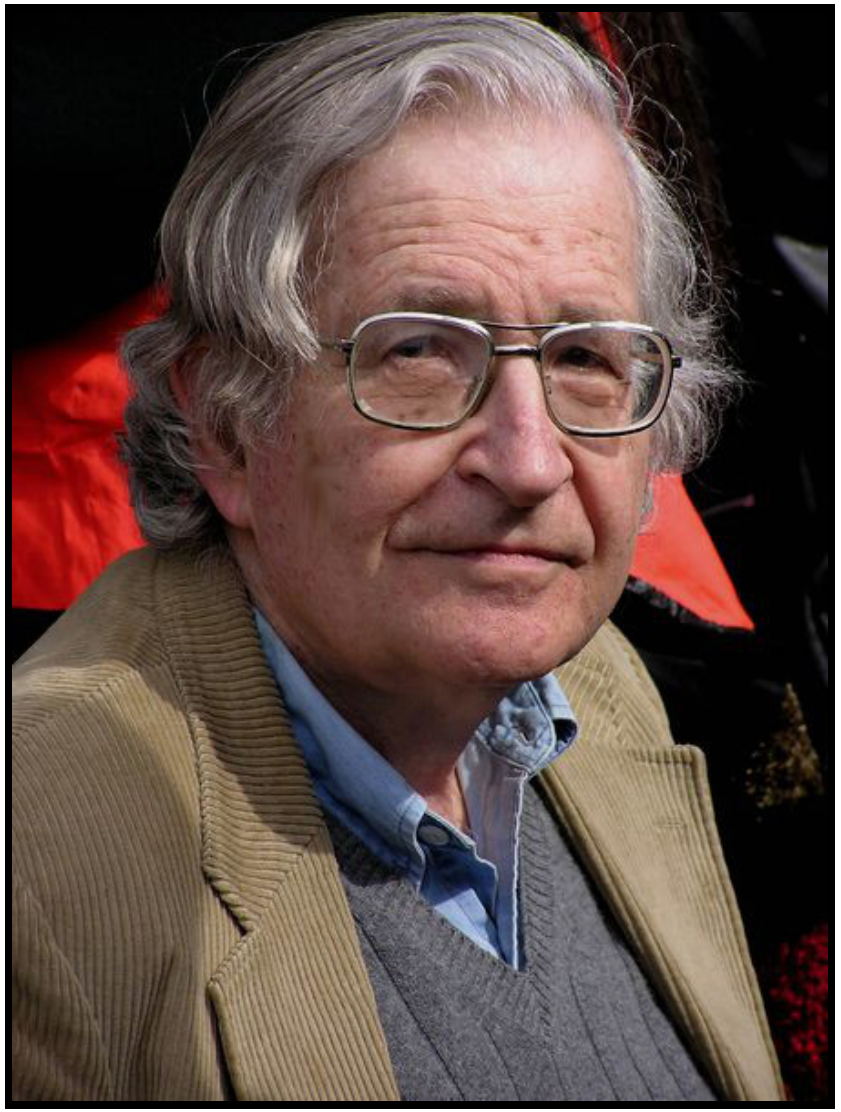
Forme normale de Chomsky

Définition: Soit $G = (V, \Sigma, S, R)$ une grammaire. G est dans la **forme normale de Chomsky** si les *règles de réécriture* sont de la forme:

- $A \to BC$ pour $A, B, C \in V$ et $B \neq S$ et $C \neq S$
- $A \to a$ pour $A \in V$, $a \in \Sigma$.
- $S \to \lambda$ pour le *symbole de départ* S.

Noam Chomsky

Noam Chomsky est un linguiste et philosophe américain. Professeur émérite de linguistique au Massachusetts Institute of Technology où il a enseigné toute sa carrière, il a fondé la linguistique générative. Il s'est fait connaître du grand public, à la fois dans son pays et à l'étranger, par son parcours d'intellectuel engagé de sensibilité anarchiste.



Théorème

Tout langage *hors contexte* est généré par une grammaire dans la *forme normale de Chomsky*.

Transformation

Il est possible de transformer un grammaire *hors context* en grammaire dans la *forme normale de Chomsky*.

1. Ajouter une variable S_0
2. Remplacer les règles-λ
3. Remplacer les règles unitaires
4. Ajouter des variables pour les règles trop longue

Automate à pile

Introduction

Pour augmenter la puissance des automates finis, on leur donne de la mémoire en leur ajoutant une **pile**.

Alphabet de la pile

La pile de l'automate à pile a son propre alphabet qui peut être différent de l'alphabet d'entrée.

Automate à pile

Définition: Un **automate à pile** consiste en un sixtuplet de la forme $(S, \Sigma, \Gamma, \delta, \iota, F)$ où

- S est un ensemble fini d'états.
- Σ est l'alphabet d'entrée (alphabet du ruban).
- Γ est l'alphabet de la pile.
- $\delta : S \times \Sigma_\lambda \times \Gamma_\lambda \to \mathcal{P}(S \times \Gamma_\lambda)$ est la *fonction de transition*.
- $\iota \in S$ est l'*état initial*.
- $F \subseteq S$ est l'ensemble des *états finaux* (ou *accepteurs* ou *acceptants*).

Opérations

Les opérations que peut effectuer un automate à pile sont les suivantes:

- Lire un symbole (et avancer la tête de lecture)
- Dépiler un symbole
- Empiler un symbole
- Changer d'état

Le choix d'opération dépend de l'état courant, du symbole lu sur le ruban d'entrée et du symbole apparaissant sur le dessus de la pile.

Transition

On décrit une transtion de l'automate à pile par

$$p, x, y \rightarrow q, z$$

- p l'état courant
- x est le symbole à l'entrée
- y est le symbole dépilé
- q est le nouvel état
- z est le symbole empilé

Remarques

- Le y est dépilé avant que le z ne soit empilé.
- Si aucun symbole n'est lu, on met un λ à la place du x.
- Si aucun symbole n'est dépilé, on met un λ à la place du y.
- Si aucun symbole n'est empilé, on met un λ à la place du z.

Exemple

Soit l'automate à pile suivant $M = (S, \Sigma, \Gamma, \delta, \iota, F)$ tel que

$$
\begin{aligned}
S &= \{s_1, s_2, s_3, s_4\} \\
\Sigma &= \{0, 1\} \\
\Gamma &= \{0, \$\} \\
\iota &= s_1 \\
F &= \{s_1, s_4\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta = \{\ & (s_1, \lambda, \lambda \to s_2, \$), (s_2, 0, \lambda \to s_2, 0), \\
& (s_2, 1, 0 \to s_3, \lambda), (s_3, 1, 0 \to s_3, \lambda), \\
& (s_3, \lambda, \$ \to s_4, \lambda)\}
\end{aligned}
$$

Diagrame de transitions

Les diagrammes de transitions des automates à pile sont comme ceux des automates finis sauf que l'étiquette d'un arc est plus complexe.

Ces étiquettes ont la forme $x, y \rightarrow z$, où

- x est le symbole lu sur le ruban,
- y est le symbole dépilé et
- z est le symbole empilé.