IFT-2002

Informatique Théorique

H14 - cours 3

Julien Marcil - julien.marcil@ift.ulaval.ca

Opérations

Soit les languages A et B. Nous définissons les opérations suivantes:

- **Union** : $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- **Çoncaténation** : $A \circ B = \{xy \mid x \in A,\ y \in B\}$
- **Étoile** : $A^* = \{x_1 x_2 \ldots x_k \mid k \geq 0,\ x_i \in A\}$

Aujourd'hui

- Automates finis non déterministes
- Expression Régulière

Automates finis non déterministes

Automate fini non déterministe

Définition: Un **automate fini non déterministe** consiste en un quintuple de la forme $(S, \Sigma, \delta, \iota, F)$ où

- S est un *ensemble fini d'états*.
- Σ est *l'alphabet*.
- $\delta : S \times \Sigma \to \mathcal{P}(S)$ est la *fonction de transition*.
- $\iota \in S$ est l'*état initial*.
- $F \subseteq S$ est l'ensemble des *états finaux* (ou *accepteurs* ou *acceptants*).

M accepte la la séquence x

Définition: L'automate fini non déterministe $M = (S, \Sigma, \delta, \iota, F)$ **accepte** (ou *reconnait*) la séquence $x = x_1 x_2 x_3 \ldots x_n$ (où $s_i \in \Sigma$) si et seulement si il *existe* une séquence d'états $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n$ (où $s_i \in S$) tels que

$$\iota = s_0$$

et

$$\forall_{j=1,\ldots,n} \; s_j \in \delta(s_{j-1}, x_j)$$

et

$$s_n \in F$$

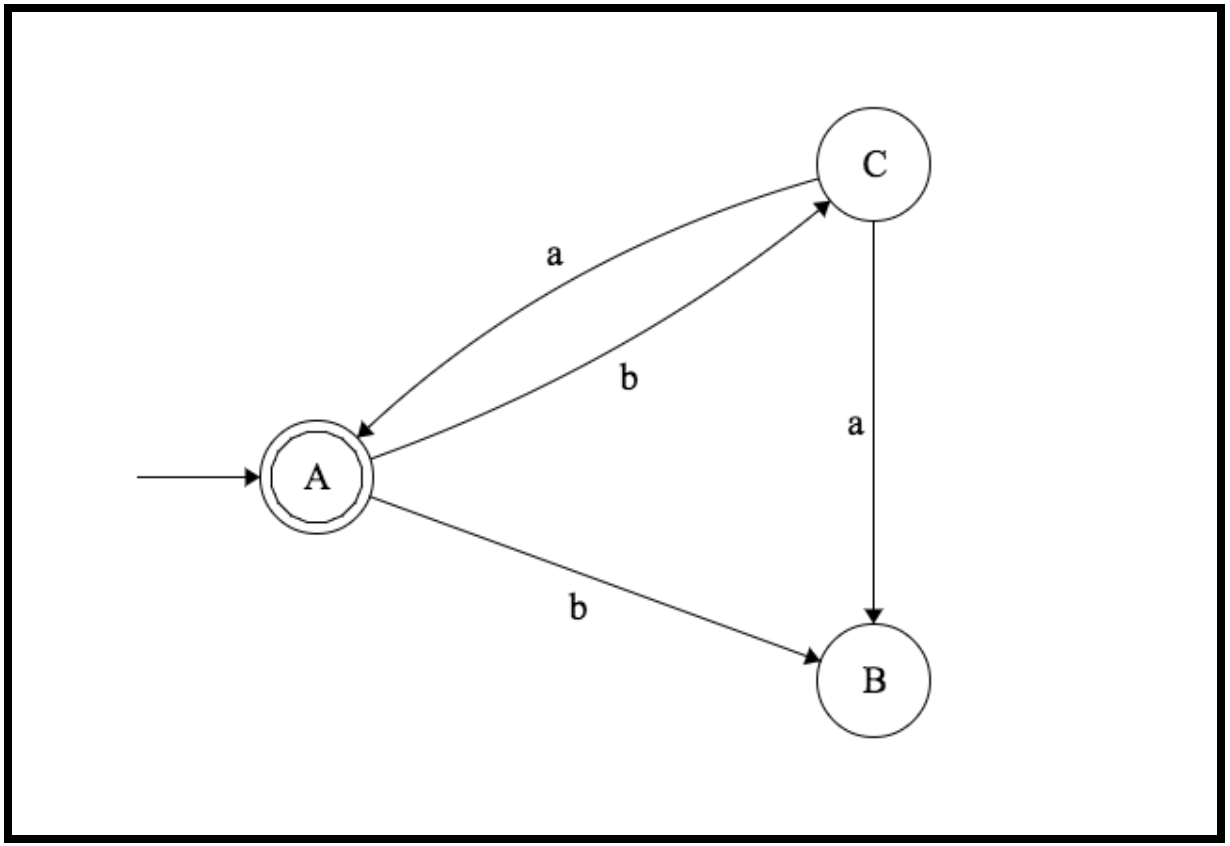
Dans le cas contraire, on dit que l'automate **rejette** la séquence.

Théorème

Pour tout automate fini non déterministe, il existe un automate fini déterministe qui accepte exactement le même langage.

Exemple

Constuire de l'automate fini déterministe équivalent au diagramme de transisition suivant



Remarques

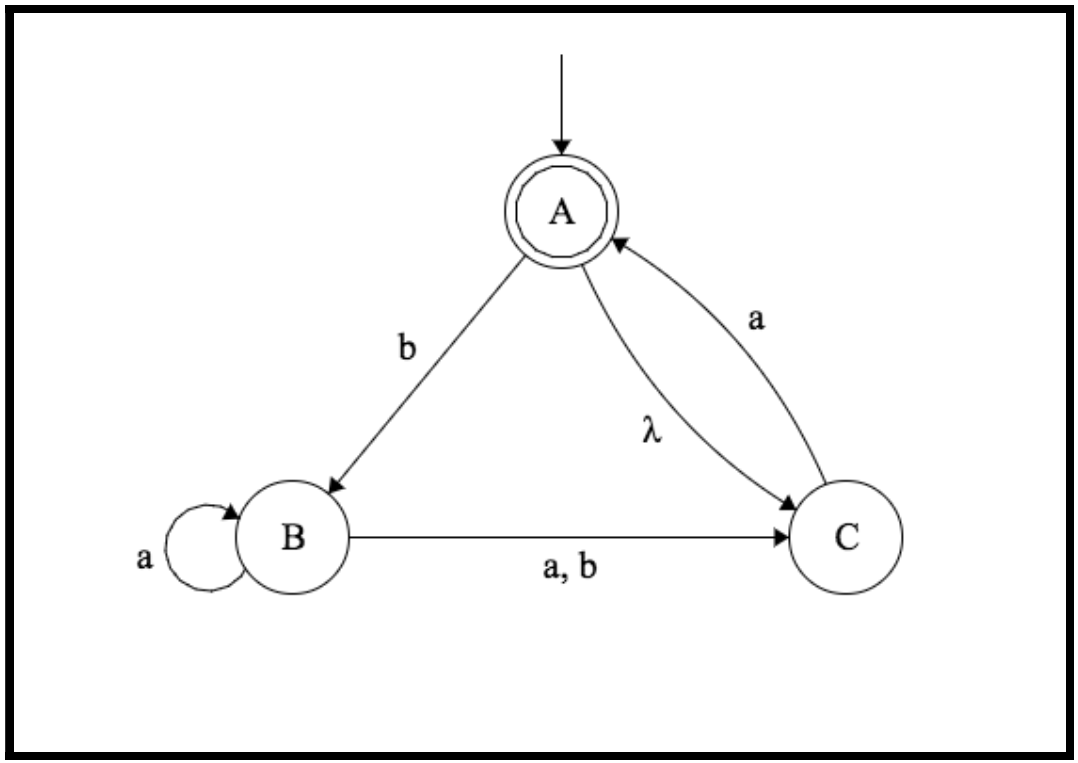
On n'augmente donc pas la *puissance* des automates finis en permettant le non déterminisme.

Par conséquent, on peut dire qu'un langage est *régulier* si il est reconnu par un automate fini non déterministe.

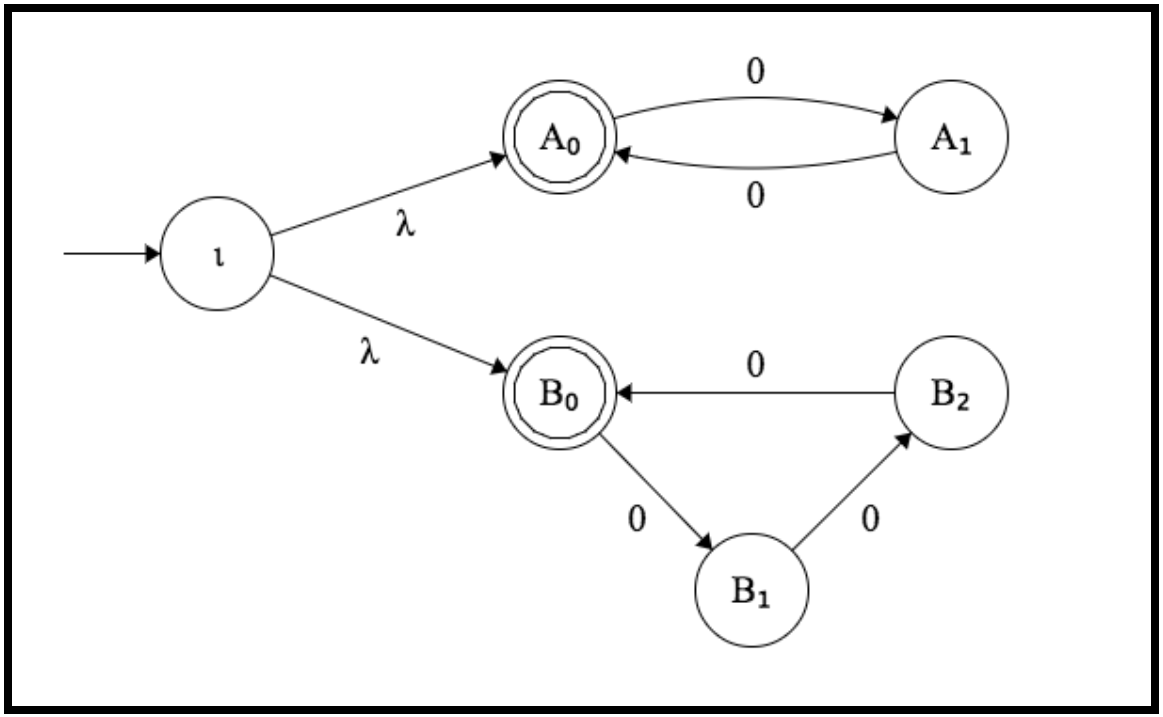
Les automates finis non déterministe ont une représentation plus simple.

transition sur λ

Supposont qu'il soit aussi possible de faire des transitions sur λ. Par exemple:



Exemple



Automate fini non déterministe (avec transition sur λ)

Définition: Un **automate fini non déterministe** consiste en un quintuple de la forme $(S, \Sigma, \delta, \iota, F)$ où

- S est un *ensemble fini d'états*.
- Σ est *l'alphabet*.
- $\delta : S \times \Sigma_\lambda \to \mathcal{P}(S)$ est la *fonction de transition*.
- $\iota \in S$ est l'*état initial*.
- $F \subseteq S$ est l'ensemble des *états finaux* (ou *accepteurs* ou *acceptants*).

où $\Sigma_\lambda = \Sigma \cup \{\lambda\}$

Théorème

L'ensemble des languages réguliers est fermé sur les opérations: *Union*, *Concaténation* et *Étoile*.

Expression régulière

Observation

Soit $L = \{a^m ba^n \mid m \in \mathbb{N}^+, n \in \mathbb{N}\}$. Il est possible de décomposer L en utilisant les opérations: *Union*, *Concaténation* et *Étoile*.

$$L = \{a\} \circ \{a\}^* \circ \{b\} \circ \{a\}^*$$

En simplifiant, il est possible d'écrire

$$aa^* ba^*$$

Expression régulière

Définition: R est une **expression régulière** si R est:

1. a, pour tout $a \in \Sigma$
2. λ
3. $\emptyset$
4. (R_1), pour une *expression régulière* R_1
5. $R_1 \cup R_2$, pour des *expressions régulières* R_1 et R_2
6. $R_1 \circ R_2$, pour des *expressions régulières* R_1 et R_2
7. R_1^*, pour une *expression régulière* R_1

Note: Cette dénition est de nature récursive.

Observation

L'opération de concaténation est **associative**. Pour tous les langages L_1, L_2, L_3 :

$$L_1 \circ (L2 \circ L3) = (L1 \circ L2) \circ L3$$

Par conséquent si r_1, r_2, r_3 sont des expressions régulières alors les expressions régulières $r_1 \circ (r_2 \circ r_3)$ et $(r_1 \circ r_2) \circ r_3$ représentent le même langage.

Notation

Pour alléger la notation, on écrira $r_1 r_2$ plutôt que $r_1 \circ r_2$.
Donc

$$r_1 r_2 r_3 = r_1 \circ r_2 \circ r_3$$
$$r_1 \circ (r_2 \circ r_3)$$
$$(r_1 \circ r_2) \circ r_3$$

Observation

L'opération d'union est **associative**. Pour tous les langages L_1, L_2, L_3 :

$$L_1 \cup (L2 \cup L3) = (L1 \cup L2) \cup L3$$

Par conséquent si r_1, r_2, r_3 sont des expressions régulières alors les expressions régulières $r_1 \cup (r_2 \cup r_3)$ et $(r_1 \cup r_2) \cup r_3$ représentent le même langage:

$$r_1 \cup r_2 \cup r_3$$

Règles de priorité

1. Les parentèses sont prioritaires sur toutes les autres opérations.
2. L'*étoile* $*$ est prioritaire sur la *concaténation* et l'*union*. C'est à dire que

$$r_1 \cup r_2^* = r_1 \cup (r_2^*)$$
$$r_1 \circ r_2^* = r_1 \circ (r_2^*)$$

3. La *concaténation* est prioritaire sur l'*union*. C'est à dire que

$$r_1 \cup r_2 \circ r_3 = r_1 \cup (r_2 \circ r_3)$$
$$r_1 \circ r_2 \cup r_3 = (r_1 \circ r_2) \cup r_3$$

Langage repésenté par R

Définition: Soit une expression régulière R et un alphabet Σ. Le **langage repésenté par R** noté $L(R)$, est défini par les propostions récursive suivantes:

1. Pour tout $a \in \Sigma$, si $R = a$ alors $L(R) = \{a\}$
2. Si $R = \lambda$ alors $L(R) = \{\lambda\}$
3. Si $R = \emptyset$ alors $L(R) = \{\}$
4. Pour des *expressions régulières* R_1 et R_2, si $R = R_1 \cup R_2$, alors $L(R) = L(R_1) \cup L(R_2)$
5. Pour des *expressions régulières* R_1 et R_2, si $R = R_1 \circ R_2$, alors $L(R) = L(R_1) \circ L(R_2)$
6. Pour une *expression régulière* R_1, si $R = R_1^*$, alors $L(R) = L(R_1)^*$

Exemples

$(ab)^*$	représente	$\{\lambda, ab, abab, \ldots\}$
ab^*	représente	$\{a, ab, abb, abbb, \ldots\}$
$a \cup bc$	représente	$\{a, bc\}$
$(a \cup b)c$	représente	$\{ac, bc\}$
$ab \cup bc$	représente	$\{ab, bc\}$
$a(b \cup b)c$	représente	$\{abc\}$

Exemples

$(a \cup \lambda)b^*$	représente	$\{ab^n \text{ ou } b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
$(a \cup \lambda)(b \cup \lambda)$	représente	$\{\lambda, a, b, ab\}$
$a^*\emptyset$	représente	$\{\}$
$\emptyset^*$	représente	$\{\lambda\}$

Théorème

Soit un alphabet Σ. Les langages réguliers sur Σ sont précisément les langages représentables par les expressions régulières sur Σ.

Démonstration

La démonstration se divise en deux parties:

- Montrer que tout langage représentable par une expression régulière est régulier.
- Montrer que tout langage régulier est représentable par une expression régulière.

Partie 1

On voit qu'une *expression régulière* représente toujours un *langage régulier*, puisque

- les expressions régulières élémentaires représentent des langages réguliers
- et que la combinaison d'expressions régulières représentant des langages réguliers est une expression régulière représentant un langage régulier.

Exercice

Convertir ces expressions régulières en automates fini non déterministe:

- $(ab \cup a)^*$
- $(a \cup b)^* aba$

Automate fini non déterministe généralisé

Remplaçons les transition par des *expressions régulières*:

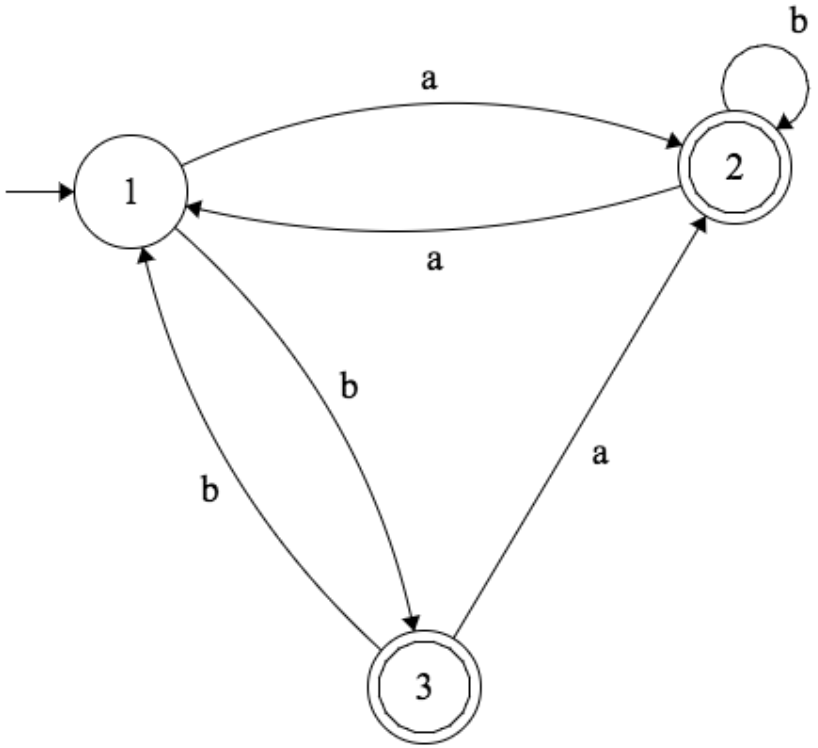
Automate fini non déterministe généralisé

Définition: Un **automate fini non déterministe** consiste en un quintuple de la forme $(S, \Sigma, \delta, s_{init}, s_{accepte})$ où

- S est un *ensemble fini d'états*.
- Σ est *l'alphabet*.
- $\delta : (S - \{s_{accepte}\}) \times (S - \{s_{init}\}) \rightarrow R$ où R est une *expression régulière*, est la *fonction de transition*.
- $s_{init} \in S$ est l'*état initial*.
- $s_{accepte} \in S$ est l'état accepteur.

Exercice

Convertir cet automate en expression régulière



Regex

Regex

Une expression régulière (Regex) est une suite de caractères typographiques (qu'on appelle plus simplement « *motif* » ou « *pattern* » dans sa forme anglaise) décrivant une chaîne de caractères dans le but de la trouver dans un bloc de texte pour lui appliquer un traitement automatisé, comme un ajout, son remplacement ou sa suppression.

Regex

abc	la chaîne de charactères: abc
abc|cba	la chaîne de charactères: abc ou cba
[abc]	un seul charactère: a, b ou c
[^abc]	n'importe quel charactère sauf a, b ou c
[a-z]	n'importe quel charactère entre a et z
[a-zA-Z]	n'importe quel charactère entre a et z ou A et Z
.	n'importe quel charactère

Regex

a?	zero ou un charactère a
a*	zero ou plus charactères a
a+	un ou plus charactères a
a{3}	exactement 3 charactères a
a{3,}	trois ou plus charactères a
a{3,6}	entre 3 et 6 charactères a

Regex

^	le début de la ligne
$	la fin de la ligne

POSIX	Description	ASCII	
[:alnum:]	Alphanumeric characters	[a-zA-Z0-9]	
[:alpha:]	Alphabetic characters	[a-zA-Z]	
[:blank:]	Space and tab	[\t]	\h
[:digit:]	Digits	[0-9]	\d
[:lower:]	Lowercase letters	[a-z]	
[:space:]	All whitespace characters, including line breaks	[\t\r\n\v\f]	\s
[:upper:]	Uppercase letters	[A-Z]	
[:word:]	Word characters (letters, numbers and underscores)	[A-Za-z0-9_]	\w

Langage non régulier