IFT-2002

Informatique Théorique

H14 - cours 11

Julien Marcil - julien.marcil@ift.ulaval.ca

Aujourd'hui

- Complexité
- P et NP

Complexité

Temps de calcul

Soit M une *machine de Turing* qui s'arrête sur toutes les entrées possibles.

Une definition naturelle du temps de calcul de M sur le mot w est le nombre de transitions avant l'arrêt de M.

Exemple

Définition: Le **temps de calcul** de M est la fonction

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$n \mapsto \max_{|w|=n} \{ \text{ temps de calcul de } M \text{ sur } w \}$$

On dit que M *fonctionne en temps* $f(n)$, ou que sa *complexité de temps* est $f(n)$.

Classe de complexité

On défini $\mathrm{TIME}(t(n))$, la **classe de complexité des langages**, comme

$$\{L \mid L \text{ est un language décidé par une MT} \\ \text{en temps } O(t(n))\}$$

La classe P

La classe de complexité **P** est définie comme

$$\bigcup_{k \geq 0} \mathrm{TIME}(n^k)$$

La classe P correspond aux langages décidables en pratique en un temps raisonnable.

Remarque

La classe P est robuste par rapport à un changement raisonnable dans le modele de calcul: les MT avec un ruban, k rubans, k têtes de lecture/écriture, et plusieurs autres modèles définissent la même classe de langages P.

Exemples

Voici quelques problèmes dans P

- Décider si $A + B = C$ pour A, B et C des matrices d'entiers.
- Décider si il existe un chemin entre deux sommets s et t dans un graphe G dont le coût est moins de c.
- Décider si une liste l est en ordre lexicographique.
- Décider si un nombre n est premier.
- Décider si un graphe G est coloriable avec deux couleurs, de telle sorte que deux sommets adjacents ne seront jamais de la même couleur.

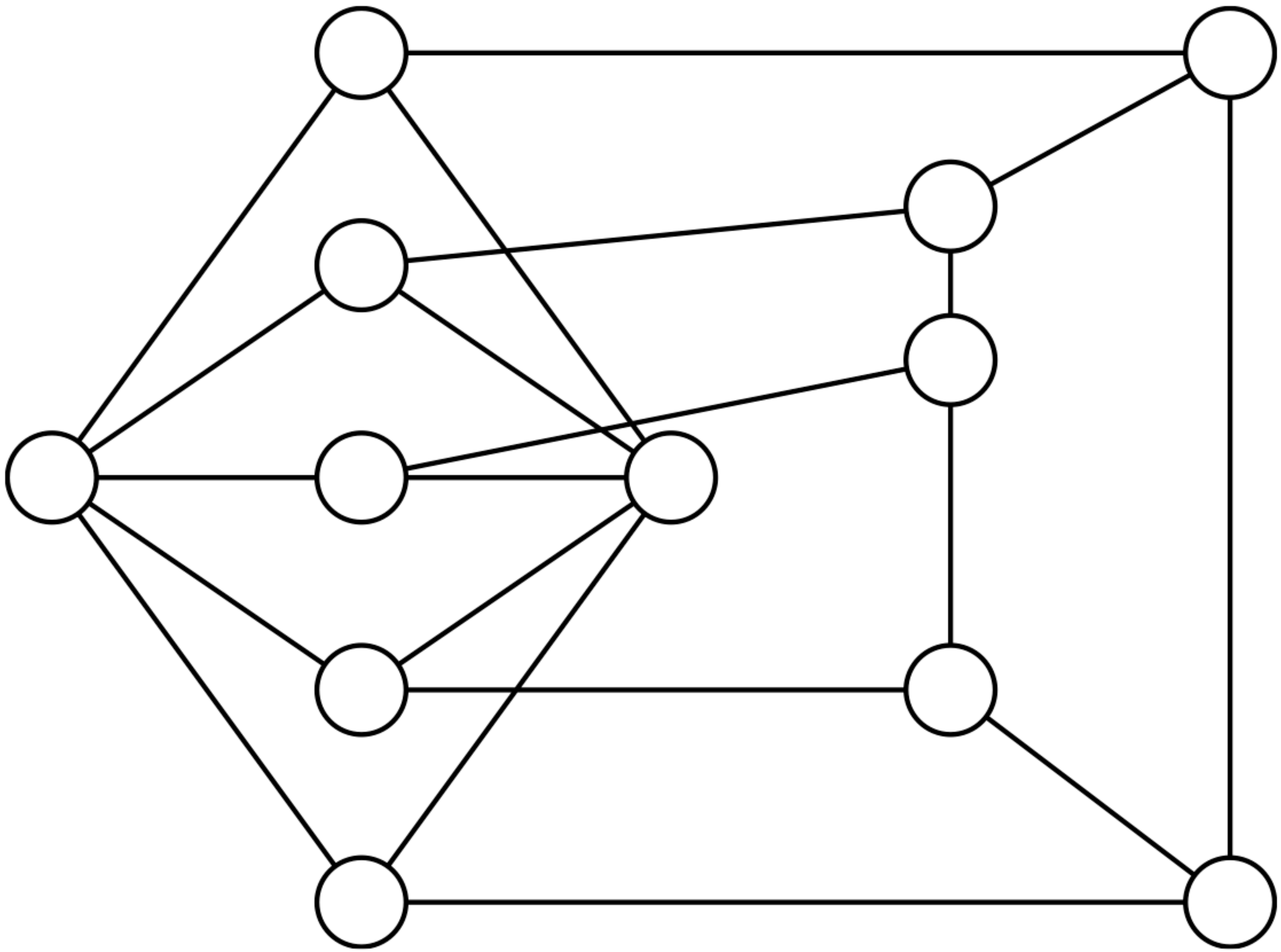
Coloration de graphe

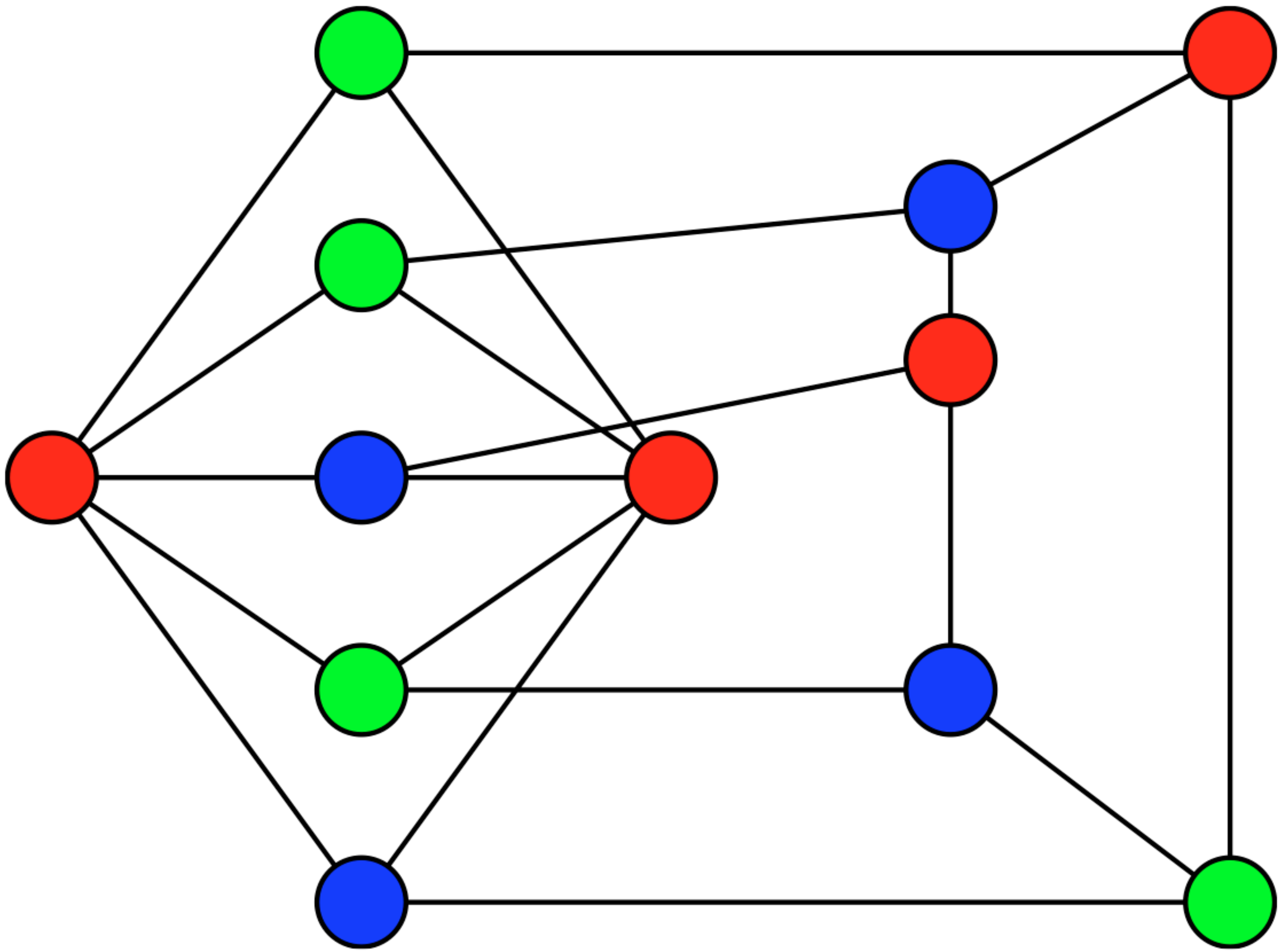
Un graphe G est k-coloriable s'il est possible d'assigner à chaque sommet de G une couleur choisie parmi k couleurs données, de telle sorte qu'il n'existe aucune paire de sommets adjacents de la même couleur.

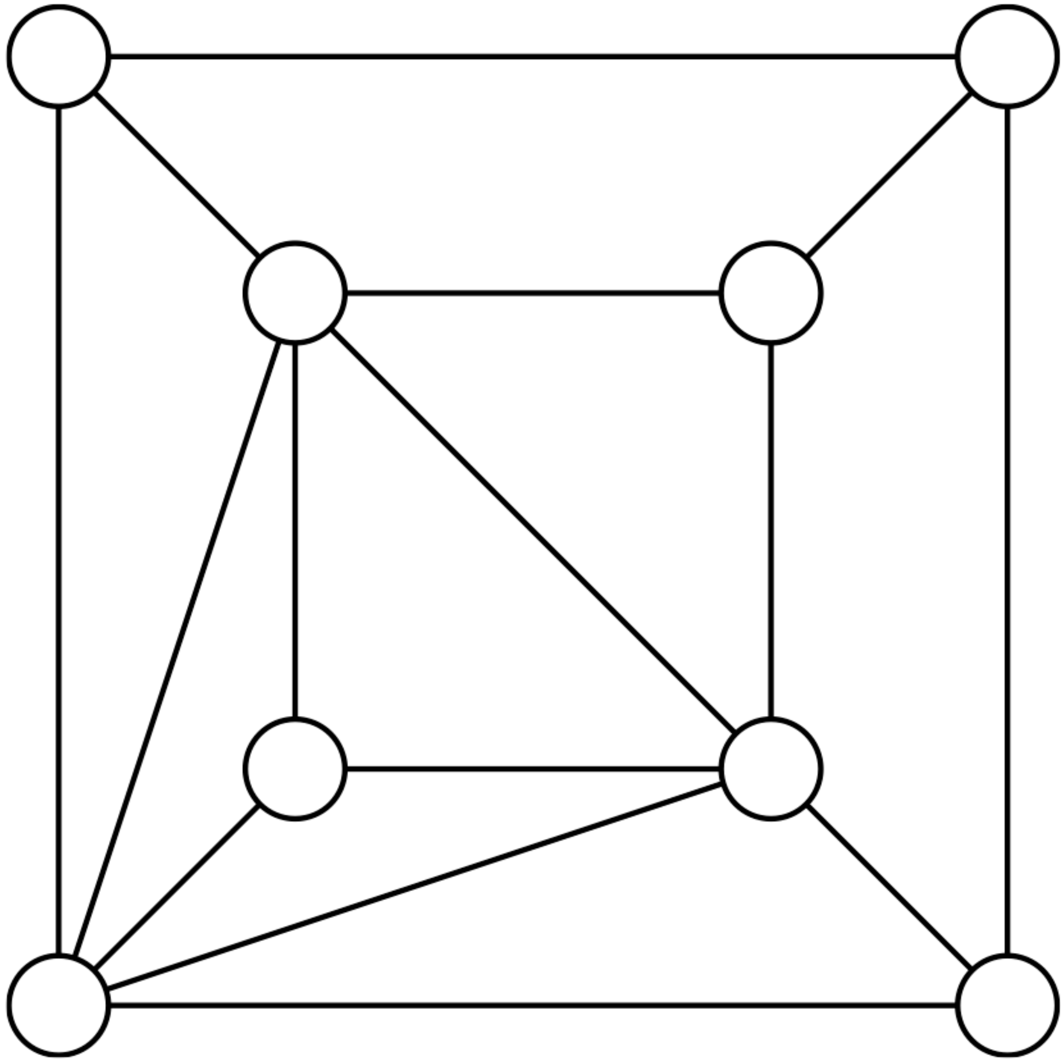
Exemple

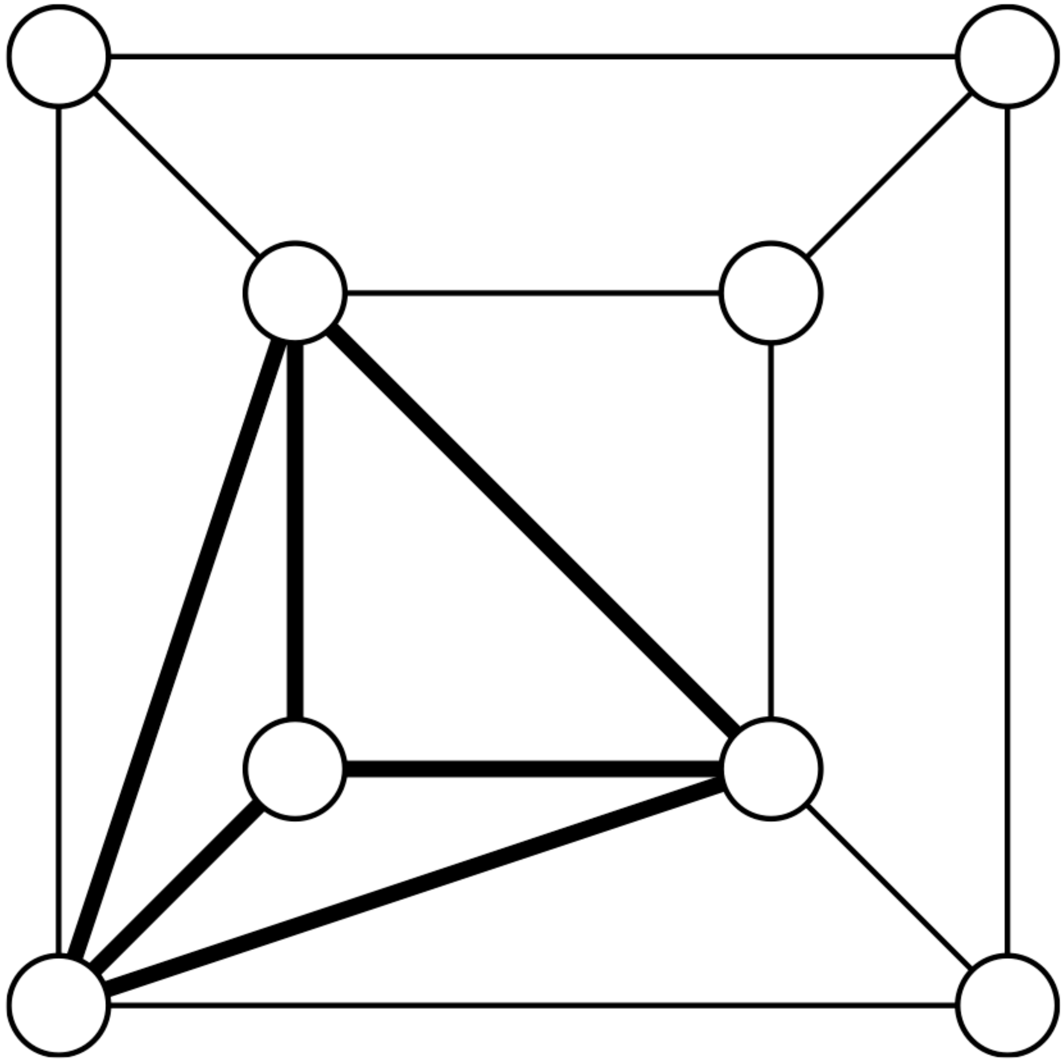
Soit le langage
$3\text{–COL} = \{\langle G \rangle \mid G \text{ est un graphe 3-coloriable}\}$

Clairement 3–COL est décidable.



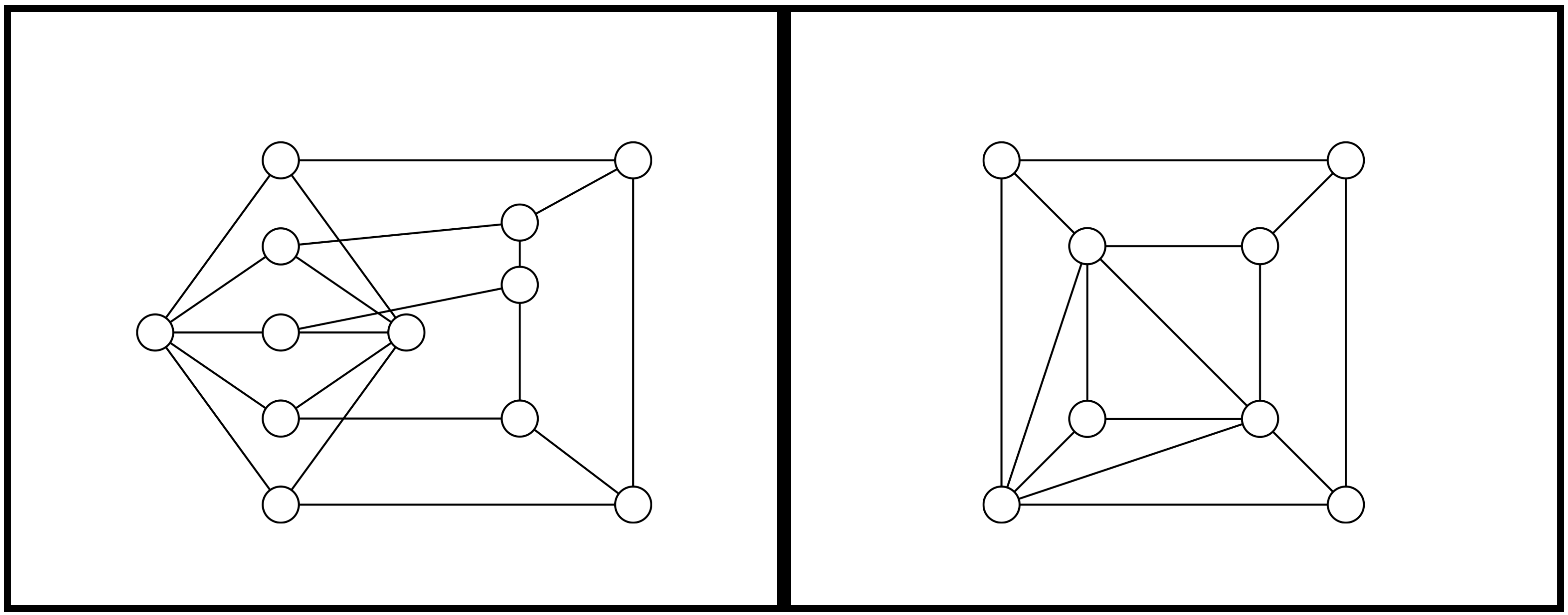






Exemple

Est-ce que $3\text{−COL} \in \mathsf{P}$?



Vérificateur

Définition: Un **vérificateur polynômial** pour un langage L est une machine de Turing V tel que pour tout $w \in \Sigma^*$:

- si $w \in L$ alors il existe un mot c tel que $\langle w, c \rangle \in L(V)$
- si $w \notin L$ alors pour tout c on a $\langle w, c \rangle \notin L(V)$

le temps de calcul de V sur $\langle w, c \rangle$ est polynômial en la taille de w.

Un c tel que $\langle w, c \rangle \in L(V)$ est appelé *certificat* ou *preuve* ou *temoin* de l'appartenance de w au langage L.

La classe NP

La classe de complexité **NP** est l'ensemble des langages qui possèdent un vérificateur polynômial.

Classe de complexité non déterministe

On défini $\text{NTIME}(t(n))$, la **classe de complexité non déterministe des langages**, comme

$$\{L \mid L \text{ est un language décidé par une MT non déterministe en temps } O(t(n))\}$$

Théorème

$$\mathsf{NP} = \bigcup_{k \geq 0} \mathsf{NTIME}(n^k)$$

Exemples de langages dans NP

Voici quelques exemples de langages dans NP.

Graphe Hamiltonien

Un **graphe hamiltonien** est un graphe possédant au moins un cycle passant par tous les sommets une fois et une seule.

HAMGRAPH

$$\{\langle G\rangle \mid G \text{ est un graphe hamiltonien }\}$$

$$\mathsf{HAMGRAPH} \in \mathsf{NP}$$

SUBSET-SUM

$$\{\ \langle\{x_1,\ldots,x_m\},t\rangle \mid (x_1,\ldots,x_m)\in\mathbb{N}^m$$
$$\exists_{\{y_1,\ldots,y_k\}\subseteq\{x_1,\ldots,x_m\}} \sum y_i = t\}$$

$$\mathsf{SUBSET-SUM} \in \mathsf{NP}$$

coNP

Remarquez que $\overline{\text{HAMGRAPH}} \notin \text{NP}$ et $\overline{\text{SUBSET}-\text{SUM}} \notin \text{NP}$.

On dit que $\overline{\text{HAMGRAPH}}$ et $\overline{\text{SUBSET}-\text{SUM}}$ sont dans coNP

P vs NP

- P: les langages *décidables* efficacement.
- NP: les langages *vérifiables* efficacement.

P = NP ?

Le Clay Mathematical Institute offre un prix de un million de dollars à quiconque répondra à la question:

$$P = NP$$

La classe EXPTIME

La classe de complexité **EXPTIME** est définie comme

$$\bigcup_{k \geq 0} \mathrm{TIME}(2^{n^k})$$

Théorème

$$\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{EXPTIME}$$

$$\mathrm{coNP} \subseteq \mathrm{EXPTIME}$$

Réduction

Une **réduction** est un algorithme transformant un problème en un autre.

Si un problème A peut être réduit à (i.e. transformé en) un problème B, et que le problème A est difficile alors le problème B est au moins aussi difficile. On écrit alors $A \leq_m B$.

Réduction polynômiales

Un language L se réduit au language K, noté $L \leq_p K$ si il existe $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ une fonction calculable en temps polynômiales tel que

$$\forall_{w \in \Sigma^*} \quad w \in L \Leftrightarrow f(w) \in K$$

Théorème

Si $A \leq_p B$ et $B \in \mathsf{P}$, alors $A \in \mathsf{P}$.

Théorème

Si $A \leq_p B$ et $B \in \mathrm{NP}$, alors $A \in \mathrm{NP}$.

NP-difficile

Définition: Le langage L est **NP-difficile** si pour tout $L' \in \text{NP}$ on a

$$L' \leq_p L$$

un langage *NP-difficile* est aussi difficile à décider, ou plus difficile, que n'importe quel langage de NP.

NP-complet

Définition: Le langage L est **NP-complet** si

- $L \in \mathrm{NP}$
- L est NP-difficile

Remaques

Soit L un langage NP-complet.

- L est au moins aussi difficile à décider que n'importe quel langage de NP.
- L n'est pas trop difficile car il est dans NP.

Théorème

Si L est un langage NP-complet et $L \in \mathsf{P}$, alors

$$\mathsf{P} = \mathsf{NP}$$

Si l'on peut résoudre un seul problème NP-complet efficacement, alors on aura résolu efficacement tous les problèmes de NP.

Corollaire

Si $A \leq_p B$ et $A \in$ NP-complet et $B \in$ NP, alors B est NP-complet.

Pour montrer qu'un problème B est NP-complet il faut réduire un problème A NP-complet à ce problème.

Théorème de Cook-Levin

SAT est NP-complet

SAT

$$\mathsf{SAT} = \{\langle \varphi \rangle \mid \varphi \text{ est une expression booléenne satisfaisable}\}$$

Exemple

$$\varphi = (\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{z})$$

$$x = 0$$
$$y = 1$$
$$z = 0$$

Forme normale conjonctive

Un **terme** est soit une variable booléenne ou la négation d'une variable booléenne.

Une **clause** est une somme booléenne de termes.

Une expression booléenne est en **forme normale conjonctive (FNC)** si il s'agit d'un produit booléen de clauses.

Exemple

L'expression booleenne suivante est en FNC

$$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4) \wedge (x_3 \vee \overline{x_5} \vee x_6) \wedge (x_3 \vee \overline{x_6})$$

3-FNC

Une expression booléenne est en **3-FNC** si elle est en FNC et si chaque clause est une somme booléenne d’exactement 3 termes qui comprennent 3 variables distinctes.

Exemple

$$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (x_3 \vee \overline{x_5} \vee x_6) \wedge (x_3 \vee \overline{x_6} \vee x_4)$$

3SAT

$$\{\langle\varphi\rangle \mid \varphi \text{ est une expression booléenne en 3-FNC satisfaisable}\}$$

Théorème

3SAT est NP-complet

Preuve

- 3SAT $\in$ NP
- SAT $\leq_p$ 3SAT

Clique

Une **clique** d'un graphe est un sous-ensemble des sommets de ce graphe dont le sous-graphe est complet, c'est-à-dire que deux sommets quelconques de la clique sont toujours adjacents.

Exemple

CLIQUE

$$\{\langle G, k\rangle \mid G \text{ est un graphe qui contient un sous-graphe complet de taille } k\}$$

Théorème

CLIQUE est NP-complet

Preuve

- CLIQUE $\in$ NP
- 3SAT $\leq_p$ CLIQUE

langages NP-complets

De nombreux problème ont été démontrer comme NP-complet

http://fr.wikipedia.org/wiki/Liste_de_problèmes_NP-complets

Complexité d’espace

Complexité d’espace

- l’espace logarithmique
- l’espace polynômial
- l’espace exponentiel

Espace logarithmique

Pour definir un espace de calcul inférieur à la taille de l’input, nous considérons que l’input réside sur un ruban en lecture seule, et qu’un autre ruban est utilisé pour faire le calcul.

Espace de calcul

Soit M une *machine de Turing* qui s'arrête sur toutes les entrées possibles.

Une definition naturelle de l'espace de calcul de M sur le mot w la position la plus à droite que la tête de lecture atteint.

Espace de calcul

Définition: Le **espace de calcul** de M est la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto \max_{|w|=n} \{ \text{ espace de calcul de } M \text{ sur } w \} \end{aligned}$$

Classe de complexité

On défini $\text{SPACE}(t(n))$, la **classe de complexité des langages**, comme

$$\{L \mid L \text{ est un language décidé par une MT} \\ \text{en espace } O(t(n))\}$$

Classe de complexité

$$L = \mathsf{SPACE}(log n)$$

$$PSPACE = \bigcup_{k \geq 0} \mathsf{SPACE}(n^k)$$

$$EXPSPACE = \bigcup_{k \geq 0} \mathsf{SPACE}(2^{n^k})$$

Théorème

$$\mathsf{TIME}(f(n)) \subseteq \mathsf{SPACE}(f(n))$$

Classe de complexité non déterministe

On défini $\mathsf{NSPACE}(t(n))$, la **classe de complexité des langages non déterministe**, comme

$$\{L \mid L \text{ est un language décidé par une MT} \\ \text{non déterministe en espace } O(t(n))\}$$

Théorème

Soit un fonction f tel que $f(n) \geq n$

$$\mathrm{NSPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{SPACE}(f^2(n))$$

Corollaire

$$\mathrm{PSPACE} = \mathrm{NPSPACE}$$